Contare gli interi, i razionali e i reali

Cristian Consonni

25 giugno 2011

Sommario

Dopo aver definito l'operazione di "contare" e il concetto di cardinalità di un insieme viene delineata una dimostrazione del fatto che la cardinalità di $\mathbb{Q}$ è uguale a quella di $\mathbb{N}$. Allo stesso modo viene tratteggiata la dimostrazione del fatto che la cardinalità di $\mathbb{R}$ è maggiore di quella del numerabile.

Dedicato a Serena, senza la quale questo scritto non avrebbe visto la luce, e a tutti i suoi futuri allievi.

I numeri in $\mathbb{Q}$ (ovvero i numeri razionali, le frazioni[1]) possono essere messi in corrispondenza con $\mathbb{N}$, in linguaggio tecnico $\mathbb{Q}$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$; in linguaggio pratico (ma impreciso) in $\mathbb{Q}$ ci sono tanti numeri quanti ce ne sono in $\mathbb{N}$, ci sono tante frazioni quanti numeri naturali.

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| \text{ (cardinalità di } \mathbb{N} = \text{cardinalità di } \mathbb{Q} \text{ anche detto } \mathbb{N} \sim \mathbb{Q}) \tag{1}$$

I numeri in $\mathbb{R}$ **non** possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i numeri di $\mathbb{N}$ (e nemmeno con quelli di $\mathbb{Q}$ dato che $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$). La cardinalità di $\mathbb{R}$ è maggiore di quella di $\mathbb{N}$ ovvero, in linguaggio pratico: ci sono più numeri reali che numeri naturali.

Volendo dare una giustificazione intuitaiva a questo fatto (ma queste cose vanno dimostrate) possiamo dire che il fatto che $\mathbb{R}$ contenga numeri come π, $\sqrt{2}$ e e fa in modo che $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$. Il lettore che vorrà continuare potrà arrivare ad apprezzare l'eleganza assoluta della dimostrazione di questo fatto.

Il problema è che quando gli insiemi diventano infiniti contare il numero di elementi può avere conseguenze potenzialmente "pericolosa" (dal punto di vista logico) e poco intuitive. Nel seguito, dopo avere dedicato un po' di spazio al significato dell'operazione di "contare", dimostremo le due affermazioni precedenti.

Definiamo anzitutto cosa vuol dire contare: "contare [il numero di elementi di un insieme] significa mettere in corrispondenza gli elementi del dato insieme con quelli di un opportuno[2] sottoinsieme dei numeri naturali". Questa operazione di corrispondenza individua una relazione di equivalenza[3]

A questo punto dire che un insieme ha, ad esempio, 2 elementi significa dire che fa parte di una certa classe di equivalenza. Ovvero la stessa classe di equivalenza in cui troviamo i sottoinsiemi seguenti:

- $A = \{1, 2\}$ (sottoinsieme di $\mathbb{N}$)
- $B = \{\text{mela}, \text{pera}\}$
- $C = \{''a'','' b''\}$
- $D = \{\text{vocali della parola cane}\}$
- ecc.

Per insiemi con un numero finito di elementi si dice *cardinalità* di un insieme A il numero di elementi di quell'insieme, indicato con $|A|$. Niente di strano, valgono anche delle proprietà che ci sembrano molto ragionevoli come, per esempio, dire che un sottoinsieme (finito) di un insieme (finito) ha meno elementi dell'insieme dato. Infatti, osserviamo questo caso:

$$A = \{''c'','' a'','' n'','' e''\};$$
$$B = \{''a'','' e''\};$$

[1] Vale la pena precisare che e frazioni e i numeri razionali non sono la stessa cosa. Le frazioni sono le classi di equivalenza sull'insieme dei numeri razionali ($\mathbb{Q}$) stabilite alla relazione di uguaglianza (che è una relazione di equivalenza).

[2] Precisiamo il significato di questo termine nell'appendice A.

[3] Come si definisce una relazione di equivalenza? Quali sono le proprietà che deve possedere? Si possono trovare le risposte nella pagina `http://it.wikipedia.org/wiki/Relazione_di_equivalenza`.

vediamo: $B \subset A$ (B sottoinsieme di A) vale $|A| = 4$, $|B| = 2$ e quindi $|B| < |A|$.

Adesso che abbiamo ben definito l'operazione di contare (i.e. trovare una corrispondenza biunivoca tra due insiemi) possiamo vedere cosa succede con gli insiemi infiniti (ovvero con un numero infinito di elementi) scopriremo che le proprietà ragionevoli di cui sopra non valgono più e capiteranno cose sorprendenti.

Abbiamo infatti visto che per contare dobbiamo trovare relazioni biunivoche tra insiemi. Ma iniziamo subito con un esempio.

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{\text{numeri naturali}\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}; \\ P &= \{p \in \mathbb{N} | p \text{ è pari}\} = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\} \end{aligned}$$

($\in$ indica appartenenza, $|$ = tale che) ed abbiamo che $P \subset \mathbb{N}$. Riusciamo a trovare una corrispondenza biunivoca $P \to \mathbb{N}$? Sì, eccola qua:

$$n = f(p) = p/2 \tag{2}$$

vediamo che succede:

$$\begin{aligned} &P \to \mathbb{N} \\ &0 \to 0 \\ &2 \to 1 \\ &4 \to 2 \\ &6 \to 3 \\ &\dots \end{aligned}$$

Siamo riusciti a trovare una corrispondenza biunivoca tra i due insieme. Quindi i due insiemi hanno la stessa cardinalità, se parliamo come mangiamo possiamo dire che ci sono tanti numeri pari quanti numeri naturali).

Vediamo immediatamente che un teorema molto ragionevole come quelle mostrato precedentemente:

$$B \subset A \Rightarrow |B| < |A|$$

non vale più per insiemi infiniti. Infatti:

$$P \subset \mathbb{N} \text{ e } |P| = |\mathbb{N}| \tag{3}$$

Un insieme che ha cardinalità uguale a quella di $\mathbb{N}$ si dice *numerabile* o "con la potenza del numerabile". Le cardinalità degli insiemi si indicano con la lettera dell'alfabeto ebraico $\aleph$ ("aleph"). In particolare per indicare la cardinalità dei naturali si usa il simbolo $\aleph_0$ ("aleph-zero").

Detto questo poniamo fine alla premessa e occupiamoci di $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$, detto in un altro modo $\mathbb{Q}$ *è numerabile*. Come si fa a vederlo, iniziamo a definire gli insiemi:

$$Q_n = \left\{ q \in \mathbb{Q} \mid q = \frac{m}{n} \right\} \tag{4}$$

cioè ogni insieme Q_n contiene le frazioni del tipo $\frac{m}{n}$, ossia:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \dots \\
Q_2 &= \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \dots \\
Q_3 &= \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \dots \\
Q_4 &= \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \dots \\
&\dots
\end{aligned}$$

vediamo che $\mathbb{Q}$ è l'unione (infinita) di tutti questi Q_n[4] ciascuno dei quali si può mettere in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$. Non rimane che mostrare che l'unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile, si tratta di dimostrare che si possono mettere in fila tutti questi numeri (ovvero formare una *successione*), basta partire dal primo numero in alto a sinistra e poi andare in diagonale da sinistra a destra e dal basso verso l'alto. Dato che si vede che nei vari Q_n alcuni numeri si ripetono (e.g. $\frac{1}{1}$ in Q_1 e $\frac{2}{2}$ in Q_2) quando li elenchiamo saltiamo i numeri ripetuti quindi:

$\mathbb{Q}$:	$\frac{1}{1}$,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{2}{1}$,	$\frac{1}{3}$,	$\frac{3}{1}$,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{2}{3}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{4}{1}$,	…
$\mathbb{N}$:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	…

dove per rendere esplicita la corrispondenza biunivoca abbiamo scritto sotto ad ogni numero la posizione che esso occupa nella successione. Quindi abbiamo mostrato che i numeri razionali si possono scrivere come una successione di elementi ossia sono numerabili.

Ora mostreremo che $\mathbb{R}$ ha una cardinalità maggiore di $\mathbb{N}$, per farlo tenteremo di fare la stessa cosa che abbiamo fatto con $\mathbb{Q}$ ovvero tenteremo di costruire esplicitamente una successione numerabile di numeri reali (che è la stessa cosa di costruire una relazione di corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{N}$). Prima di tutto cominciamo a renderci la vita più facile, invece di costruire una corrispondenza tra tutto l'insieme $\mathbb{R}$ e $\mathbb{N}$ cominceremo a mostrare che $\mathbb{R}$ si può mettere in corrispondenza biunivoca con l'intervallo $I = (0, 1)$ estremi esclusi[5]. Come si fa? C'è una (bellissima) costruzione geometrica, rappresentata in figura 1. Tracciamo un sistema di assi cartesiani xOy e nel punto di coordinate $C = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ tracciamo una circonferenza γ di raggio $r = \frac{1}{2}$, a questo punto associamo[6] ad ogni punto B sulla retta reale il punto B' trovato nel seguente modo:

[4]Si scrive anche così:

$$\mathbb{Q} = \cup_{n=1}^{+\infty} Q_n$$

[5]L'intervallo I è definito così:

$$I = (0, 1) = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}$$

[6]Quella costruita è una relazione ed è pure biunivoca (si veda `http://it.wikipedia.org/wiki/Corrispondenza_biunivoca`).

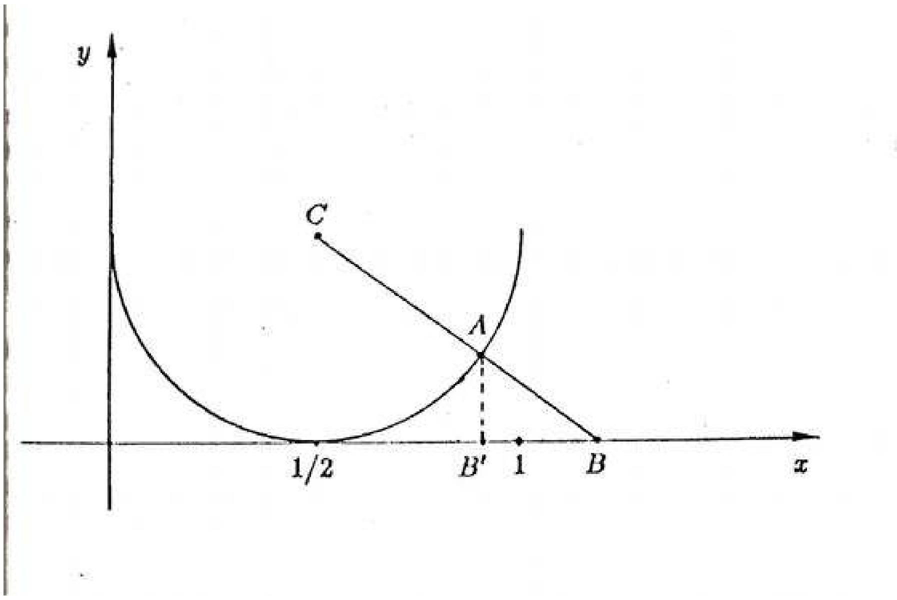

Figura 1: La mappa geometrica di Cantor.

- si traccia una retta r che collega il centro C della circonferenzacon il punto B;
- si individua il punto A in cui la retta r interseca la circonferenza γ;
- si trova B' proiettando in punto A sulla retta reale.

In questo modo abbiamo verificato che la cardinalità di $\mathbb{R}$ è la stessa dell'insieme dei numeri reali (intervallo) $(0, 1)$. Esistono altri modi di mostrare questa cosa[7].

Adesso mostriamo che *non* è possibile costruire una relazione biunivoca tra l'intervallo I e $\mathbb{N}$. Questa dimostrazione è fatta *per assurdo*, ovvero se si vuole dimostrare un teorema si prende come ipotesi la sua negazione e si giunge ad una contraddizione[8].

Teorema (Teorema di Cantor)**.** *La cardinalità di* $\mathbb{R}$ *è più grande di quella di* $\mathbb{N}$*,* $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo che sia possibile scrivere tutti gli elementi di $I = (0, 1)$ in una successione [9]. Scriviamo questa successione tramite la rappresentazione decimale degli elementi di I quindi:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, C_{1,1}C_{1,2}C_{1,3}C_{1,4}\dots \\ x_1 &= 0, C_{2,1}C_{2,2}C_{2,3}C_{2,4}\dots \\ x_1 &= 0, C_{3,1}C_{3,2}C_{3,3}C_{3,4}\dots \\ &\dots \end{aligned} \tag{5}$$

[7]si veda l'appendice B.

[8]Un breve approfondimento sulle dimostrazioni per assurdo è disponibile nell'appendice C.

[9]al costo di essere pedanti ricordiamo che questo equivale al trovare una corrispondenza tra gli elementi di I e quelli di $\mathbb{N}$

Dove in 5 abiamo che ogni $C_{n,k}$ è una cifra compresa tra 0 e 9. Ricordiamoci che per ipotesi abbiamo scritto tutte i numeri compresi tra 0 e 1. Ora costruiamo esplicitamente un numero che appartenga a $(0, 1)$ ma che sicuramente[10] non abbiamo elencato in 5. Basta prendere:

$$\begin{aligned} & C_1 \neq C_{1,1} \\ & C_2 \neq C_{2,2} \\ & C_3 \neq C_{3,3} \\ & \dots \\ & C_n \neq C_{n,n} \\ & \dots \end{aligned} \tag{6}$$

e scrivere:

$$x = 0, C_1C_2C_3C_4 \dots \tag{7}$$

e abbiamo quindi che x è un numero diverso da tutti quelli elencati finora dato che differiscono nella n-esima cifra (decimale), ovvero $x \neq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Quindi non abbiamo elencato tutti i numeri compresi in $(0, 1)$ contrariamente all'ipotesi. $\square$

Il punto della dimostrazione precedente è che non si riescono ad elencare tutte le sequenze di (cifre decimali che componegono i) numeri compresi tra zero e uno (ovvero i numeri nell'intervallo $(0, 1)$. Infatti posso inventarmi sequenze di numeri decimali che non sono razionali (cioè non derivano dalla divisione di due interi) come per esempio:

$$0,01001001000100001 \dots \tag{8}$$

Il numero nell'esempio non solo è irrazionale ma è anche trascendente[11] il π è un altro esempio di numero irrazionale trascendente, $\sqrt{2}$ invece è un numero irrazionale[12] ma non è trascendente[13]. Un insieme con la cardinalità di $\mathbb{R}$ si dice avere la "potenza del continuo".

Abbiamo quindi dimostrato[14] che:

$$|\mathbb{N}| = \mathbb{Q} \text{ e } \mathbb{R} \geq \mathbb{N} \tag{9}$$

Infine, per chi volesse approfondire, vale la pena ricordare che l'esistenza di cardinalità intermedie tra quella del numerabile e quella del continuo è oggetto dell'*ipotesi del continuo*[15] e che tale enunciato è indecidile (nella teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel comprensiva dell'assioma di scelta).

[10]andrebbero chiariti alcuni dettagli (che abbiamo omesso) che servono per evitare alcune scritture "patologiche" come $0,9999\dots$ (che ricordiamo essere esattamente uguale a 1).

[11]Cioè non può essere ottenuto come soluzione di un'equazione a coefficienti razionali (si veda `http://it.wikipedia.org/wiki/Numero_trascendente`).

[12]la dimostrazione di questo fatto è riportata nell'appendice D.

[13]Infatti è la soluzione positiva dell'equazione: $x^2 - 2 = 0$.

[14]La dimostrazione precedente afferma che $\mathbb{R} \neq \mathbb{N}$, sapendo che $\mathbb{R} \supset \mathbb{N}$ si arriva alla conclusione affermata nel testo (si può di mostrare che per tutti gli insiemi A, B tali che $A \supset B$ vale $|A| \geq |B|$.

[15]per approfondire si veda `http://it.wikipedia.org/wiki/Ipotesi_del_continuo`.

A La "costruzione standard" dei numeri naturali

La seguente è una costruzione standard[16] nella teoria degli insiemi per definire i numeri naturali: Si ponga per definizione:

$$0 = \{\} \text{ (il numero "zero" viene posto uguale all'insieme vuoto } \emptyset)$$

si definisce il successore di un numero naturale a:

$$S(a) = a \cup a \ \forall \ a$$

L'insieme dei numeri naturali è allora definito come l'unione di tutti gli insiemi contenenti 0 che sono chiusi rispetto alla funzione successione S. L'esistenza di un insieme siffatto è stabilita dall'assioma dell'infinito. Se tale insieme esiste soddisfa gli assiomi di Peano. Ogni numero naturale è allora uguale all'insieme dei numeri naturali minori di esso, per esempio:

$$\begin{aligned}
&0 = \emptyset \\
&1 = \{0\} = \{\emptyset\} \\
&2 = \{0, 1\} = \{0, \{0\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
&3 = \{0, 1, 2\} = \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
&\ldots
\end{aligned}$$

così via. A costo di essere pedanti facciamo notare che $1 \neq \emptyset$ e $\emptyset \in 1$ cioè $1 = \emptyset$ è un insieme (non vuoto) che ha come elemento un insieme.

Quando ci si riferisce ad un numero naturale come insieme, questo è il senso. Con questa definizione, ci sono esattamente n elementi nell'insieme n-esimo.

B La mappa tra $\mathbb{R}$ e $(0, 1)$

Oltre alla mappa costruita geometricamente nel testo si può costruire una mappa:

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \to (0, 1) \\ \quad 1 - \dfrac{1}{2(x+1)} & \text{se } x < 0 \\ \quad \dfrac{1}{2(x+1)} & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \tag{10}$$

La funzione mappa tutti i numeri reali nell'intervallo $(0, 1)$, essa è rappresentata nella figura 2.

La funzione data è biunivoca, infatti è possibile scrivere la funzione inversa:

$$\begin{cases} f^{-1} : (0, 1) \to \mathbb{R} \\ \quad -1 + \dfrac{1}{2x} & \text{se } 0 < x \leq \dfrac{1}{2} \\ \quad 1 - \dfrac{1}{2(1-x)} & \text{se } \dfrac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \tag{11}$$

La funzione inversa f^{-1} è rappresentata nella figura 3.

[16]Sezione tratta da `http://it.wikipedia.org/wiki/Numero_naturale#La_costruzione_standard`.

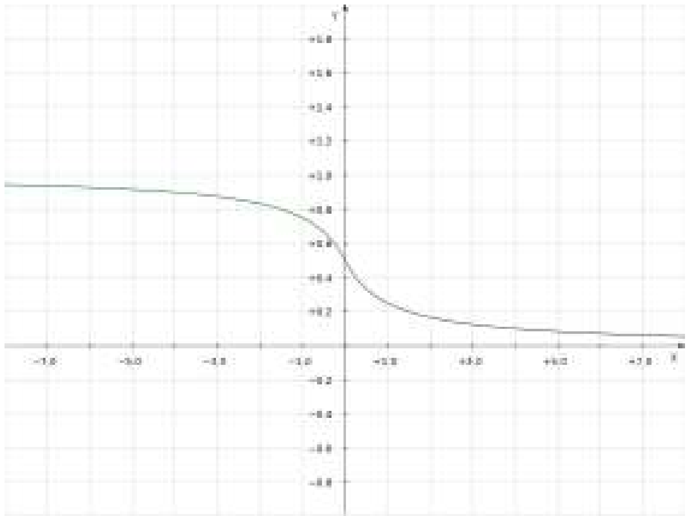

Figura 2: La funzione 10. In verde la parte valida per $x < 0$, in blu la parte valida per $x \geq 0$.

C Dimostrazioni per assurdo

> «La *reductio ad absurdum*, tanto amata da Euclide, è una delle più belle armi di un matematico. È un gambetto molto più raffinato di qualsiasi gambetto degli scacchi: un giocatore di scacchi può offrire in sacrificio un pedone o anche qualche altro pezzo, ma il matematico offre la partita.»
>
> (G. H. Hardy, Apologia di un matematico)

Gli oggetti fondamentali della logica sono le *proposizioni*, ovvero enunciati dei quali è possibile stabilire un *valore di verità*, vero o falso.

Si dice *implicazione logica* un particolare connettivo logico, ovvero una "particella" che permette di costruire una nuova proposizione a partire da due proposizione iniziali A e B, che si scrive:

$$A \Rightarrow B \text{ ("A implica B")}$$

che ha la seguente tavola di verità:

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A viene detta "premessa", B "conseguenza". $A \Rightarrow B$ si legge "Se A (è vera) *allora* B (è vera)".

Data una implicazione $A \Rightarrow B$ (detta "diretta") si possono costruire le seguenti, il simbolo $\neg A$ indica la negazione di A:

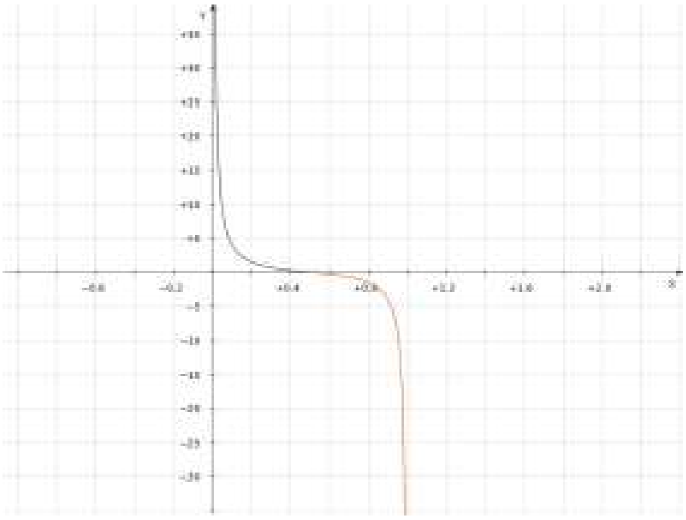

Figura 3: La funzione 11. In blu la parte valida per $0 < x \leq \frac{1}{2}$, in rosso la parte valida per $\frac{1}{2} < x < 1$.

- implicazione inversa: $B \Rightarrow A$
- implicazione contronominale: $\neg B \Rightarrow \neg A$
- implicazione contronominale inversa: $\neg A \Rightarrow \neg B$

Si può mostrare che se la proposizione diretta è vera allora lo è anche la contronominale e viceversa ovvero:

$$A \Rightarrow B \text{ e } \neg B \Rightarrow \neg A$$

sono “logicamente equivalenti”.

In una dimostrazione diretta si vuole mostrare la validità di una *tesi* B a partire da un'ipotesi vera A utilizzando passaggi “legali” (ovvero implicazioni $\Rightarrow$ sempre vere). Si giunge quindi a $A \Rightarrow B$. Nella *dimostrazione per assurdo*, si parte dall *negazione della tesi* $\neg B$ e usando implicazioni vere $\Rightarrow$ si giunge a $\neg A$ ovvero a una negazione dell'ipotesi ovvero ad una *contraddizione*[17] con la stessa $(A \wedge \neg A)$[18].

D Dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$

Non possiamo sottarci all'urgenza di riportare qui la dimostrazione dell'irrazionalità della radice di due (che secondo H. G. Hardy è una delle più belle della matematica, opinione che condividiamo). In questo modo forniremo anche un ulteriore esempio di dimostrazione per assurdo.

[17]Una contraddizione è un enunciato sempre falso.

[18]il simbolo $\wedge$ è la congiunzione logica “E”: $A \wedge \neg A$ è un tipico esempio di contraddizione come si può verificare costruendone esplicitamente la tavola di verità.

Teorema (Irrazionalità di $\sqrt{2}$). $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale. Ciò comporta che esistono due interi a e b privi di fattori comuni[19] tali che

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

Elevando al quadrato si ha:

$$\frac{a^2}{b^2} = 2, \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

Questo implica che a^2 è pari, e che quindi a è pari, ossia esiste k intero tale che $a = 2k$. Sostituendo abbiamo

$$a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2b^2 \Longrightarrow b^2 = 2k^2$$

cioè anche b è pari, e quindi a e b hanno in comune un fattore 2, il che è impossibile perché li avevamo assunti privi di fattori comuni.

Poiché abbiamo ottenuto una contraddizione con l'assunzione che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale, essa deve essere falsa. Dunque abbiamo dimostrato che $\sqrt{2}$ è irrazionale. □

[19] questo fatto, del tutto non banale, deve essere dimostrato noi qui lo assumeremo essere una proprietà nota.